

Integrales de Campos Vectoriales

MA-2113, Guía #2

Preparado, resuelto y tipeado en L^AT_EX por Axel Voza

Prosiguiendo con el estudio de las integrales dobles sobre superficies, nuestro último tema a tratar se basa en buscar el valor numérico (y muy poco la representación vectorial) de la acción de campos vectoriales sobre superficies. Si le sirve de algo al lector, desde esta guía se tratará (dependiendo del tiempo disponible) de publicar algunos ejemplos resueltos, al comienzo de cada nuevo lote de ejercicios.

Para empezar, resulta instructivo dar algunas interpretaciones geométricas de un campo vectorial, a la vez de dar las definiciones pertinentes al cálculo con estos campos. Una manera directa de representar un campo vectorial en el plano o en el espacio es por medio de un dibujo de vectores. Si el campo vectorial se denota por una $\mathbf{F} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$, dibujaremos un vector $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ con origen en el punto \mathbf{x} . Por ejemplo, es conocido de la Física que la ley que rige la fuerza gravitacional entre dos cuerpos de masas m y M viene dada por

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{mMg}{r^3}\mathbf{r},$$

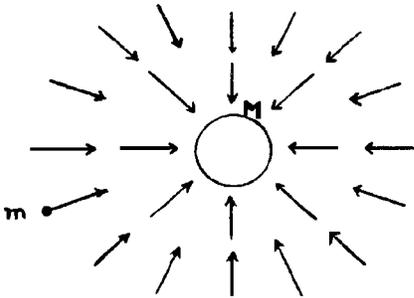


Fig. 1: Campo gravitacional sobre dos cuerpos en el espacio.

donde $\mathbf{r} = (x, y, z)$ y $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (esta notación para el vector variable (x, y, z) será usada como standard en lo sucesivo). Nótese que la fuerza es inversamente proporcional a la distancia que separa a los cuerpos, por lo que los vectores del campo tienen longitud menor a medida que m está más lejos de M . En cuanto al signo menos, se deja al lector que (con ayuda de la Fig. 1) chequee la dirección de los vectores resultantes.

1. Dibujar los siguientes campos vectoriales $\mathbf{F} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$:

- (a) $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \left(-\frac{y}{2}, \frac{x}{2}\right)$
- (b) $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (1, y)$
- (c) $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}(-x, y)$
- (d) $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}(y + x, y - x)$
- (e) ∇f , si $f(x, y) = xy$
- (f) ∇f , si $f(x, y) = x^2 + y^2$

Solución: Veamos el (a). En primer lugar, $\mathbf{F}(0, 0) = (0, 0)$. Además, en todos los puntos donde x ó y es cero, el campo es perpendicular al eje x ó al eje y , respectivamente. Si (x, y) es un punto del primer cuadrante, el campo tiene primera coordenada $-y/2 < 0$ y segunda componente $x/2 > 0$, por lo que la pendiente en este cuadrante es negativa. La situación en el tercer cuadrante es análoga, pero la dirección del campo es contraria, ya que hay inversión en los signos de las coordenadas. Finalmente, en el segundo cuadrante, ambas coordenadas son negativas, por lo que la pendiente es positiva, y en el cuarto cuadrante, la dirección es también positiva, cambiando sólo el sentido. En todos estos casos, $\|\mathbf{F}(\mathbf{r})\|$ aumenta a medida que el punto se aleja del origen, y el aspecto del campo vectorial es como se indica en la Fig. 2:

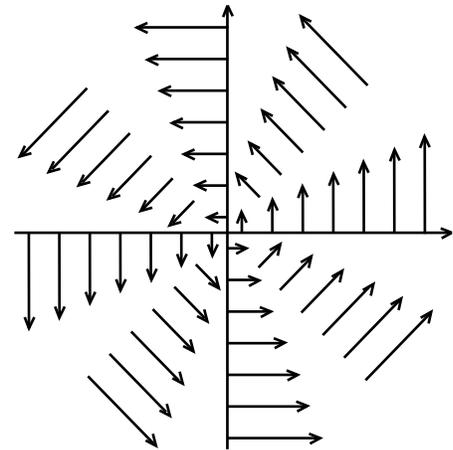


Fig. 2: Campo vectorial del ejercicio 1a.

2. Por un tubo torcido en ángulo fluye agua, como se indica en la Fig. 3. En cierto instante, una partícula P se encuentra arrastrada por la corriente. Dibujar en el mismo gráfico la trayectoria descrita por el punto P .

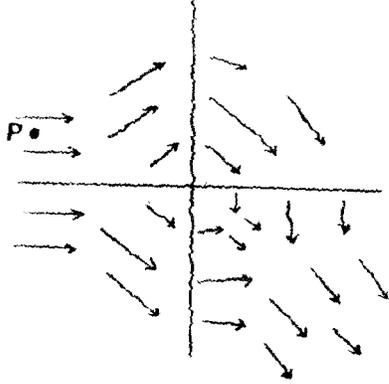


Fig. 3: Flujo de agua en la tubería del ejercicio 2.

Con estos pequeños ejemplos intuitivos, comenzaremos a definir las operaciones más importantes del cálculo vectorial.

Sea $\mathbf{F} : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$. Se define la *divergencia* del campo $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (P(\mathbf{r}), Q(\mathbf{r}), R(\mathbf{r}))$ como

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z},$$

y denotando formalmente¹ $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$, tenemos que $\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}$. Aunque esta definición no es intuitivamente clara, la noción de divergencia tiene una interpretación física importante; si \mathbf{F} es el campo de velocidad de un flujo de gas, por ejemplo, entonces $\operatorname{div} \mathbf{F}$ representa la razón de expansión del gas por unidad de volumen y por unidad de tiempo, es decir, la *razón de cambio instantánea de volumen por unidad de tiempo*. Se dirá además que \mathbf{F} es *incompresible* si $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$.

3. Sea \mathbf{F} un campo vectorial tal que \mathbf{F} no varía en la dirección del eje z , y las normas de los vectores de \mathbf{F} son cada vez menores, a medida que \mathbf{r} se aleja del eje y paralelamente al eje x . Determinar el signo de $\operatorname{div} \mathbf{F}$ en el punto B de la Fig. 4.

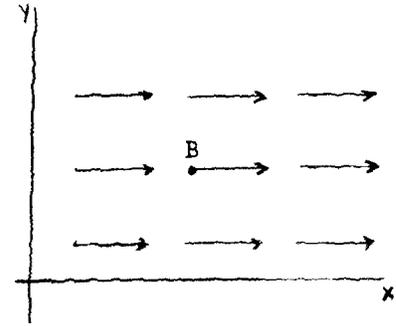


Fig. 4: Ejercicio 3.

Solución: Por hipótesis, $\frac{\partial R}{\partial z} = 0$. Como los vectores del campo son paralelos al eje x , tenemos además que $\frac{\partial Q}{\partial y} = 0$, ya que no hay variación en la segunda coordenada de este campo. Como $\|\mathbf{F}(\mathbf{r})\|$ se hace pequeña a medida que x crece, es claro que $\frac{\partial P}{\partial x} < 0$, por lo que tenemos finalmente $\operatorname{div} \mathbf{F} < 0$.

4. ¿Qué se puede decir acerca de la divergencia del campo vectorial indicado en los puntos A , B y C ?

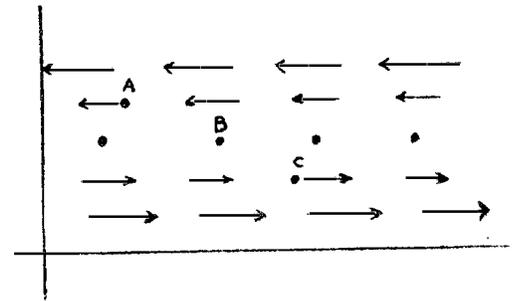


Fig. 5: Ejercicio 4.

5. Dar un ejemplo de un campo vectorial no nulo, paralelo al plano xz , con divergencia nula y que dependa sólo de x .
6. Si \mathbf{c} es un vector constante, $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ es una función diferenciable y $\mathbf{F} : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ es un campo diferenciable, demostrar que

(a) $\operatorname{div}(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \operatorname{div} \mathbf{F} + \operatorname{div} \mathbf{G}$.

(b) $\operatorname{div}(f\mathbf{c}) = \mathbf{c} \cdot \nabla f$.

(c) $\operatorname{div}(f\mathbf{F}) = \nabla f \cdot \mathbf{F} + f \operatorname{div} \mathbf{F}$.

(d) $\operatorname{div}(\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ (este resultado aparece con cierta frecuencia, por lo que se le

¹Esta notación es sólo simbólica; no tiene significado por sí misma.

suele dar nombre propio: *el laplaciano* de f se define como $\nabla^2 f = \operatorname{div} \nabla f$. Además, si f satisface $\nabla^2 f = 0$, f se dice *armónica*).

- (e) $\nabla^2(fg) = f\nabla^2 g + g\nabla^2 f + 2\nabla f \cdot \nabla g$.
- (f) $\operatorname{div}(f\nabla f) = f\nabla^2 f + \|\nabla f\|^2$.
- (g) $\operatorname{div}(\nabla f \times \nabla f) = 0, \forall f \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}^3)$.
- (h) $\operatorname{div}(r\mathbf{r}) = 4r$.

7. *Hallar todos los valores para los cuales $\operatorname{div} r^n \mathbf{r} = 0$, demostrando primero que $\operatorname{div} r^n \mathbf{r} = (n + 3)r^n$.

8. Si $f = \frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}}{r^3}$, demostrar que

$$\nabla f = \frac{r^2 \mathbf{c} - 3(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5}.$$

Hallar también $\operatorname{div} \nabla f$ y deducir que una solución de la ecuación $\nabla^2 f = 0$ es $f(\mathbf{r}) = \frac{x + y + z}{r^3}$.

Sea $\mathbf{F} : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$. Se define el *rotacional* del campo $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (P(\mathbf{r}), Q(\mathbf{r}), R(\mathbf{r}))$ como

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Además, \mathbf{F} se dice *irrotacional* si $\operatorname{rot} \mathbf{F} = 0$, en el sentido intuitivo de la palabra; si un campo vectorial \mathbf{F} representa el flujo de un líquido, entonces $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ significa que el flujo es libre de rotaciones, ya que un disco de paletas quedaría inmóvil en el líquido. Si $\nabla \times \mathbf{F} \neq 0$, este disco giraría dentro del flujo.

Se tienen además las siguientes propiedades notables.

Teorema 2.1. Si $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ es de clase $\mathcal{C}^2(\mathbf{R}^3)$, entonces

$$\operatorname{rot} \nabla f = \nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}.$$

Si $\mathbf{F} : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ es de clase $\mathcal{C}^2(\mathbf{R}^3)$, entonces

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0.$$

9. Para cada uno de los siguientes campos vectoriales, hallar la divergencia y el rotacional:

- (a) $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (x^2 + yz, y^2 + xz, z^2 + xy)$.
- (b) $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (2z - 3y, 3x - z, y - 2x)$.
- (c) $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (z + \operatorname{sen} y, -z + x \operatorname{cos} y, 0)$.
- (d) $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (ax + by, cx + dy, f(\mathbf{r}))$, donde f es diferenciable y a, b, c, d son constantes.

10. Demostrar que $\mathbf{F} = (x^2 y, xz, -xyz)$ no puede ser el rotacional de ningún campo vectorial.

11. Demostrar que las partes reales e imaginarias de cada una de las siguientes funciones complejas forman las componentes de un campo vectorial incompresible e irrotacional en el plano:

- (a) $f(x, y) = (x - iy)^3$.
- (b) $f(x, y) = e^{x-iy} = e^x(\operatorname{cos} y - i \operatorname{sen} y)$.
- (c) $f(x, y) = \frac{y - ix}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.
- (d) $f(x, y) = \operatorname{sen}(x - iy)$, sabiendo que $\operatorname{sen}(x - iy) = \operatorname{sen} x \operatorname{cosh} y - i \operatorname{cos} x \operatorname{senh} y$.

12. Se sabe que la matriz jacobiana del campo vectorial \mathbf{F} es un punto A es

$$D(\mathbf{F})(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

¿Cuál es el rotacional de \mathbf{F} en el punto A ?

13. Demostrar las siguientes relaciones (usando las mismas notaciones del ejercicio 6) entre el rotacional y la divergencia:

- (a) $\operatorname{rot}(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \operatorname{rot} \mathbf{F} + \operatorname{rot} \mathbf{G}$.
- (b) $\operatorname{rot}(f\mathbf{F}) = f \operatorname{rot} \mathbf{F} + (\nabla f) \times \mathbf{F}$.
- (c) $\operatorname{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{G}$.
- (d) $\nabla(\|\mathbf{F}\|^2) = 2(\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{F} + 2\mathbf{F} \times (\operatorname{rot} \mathbf{F})$.
- (e) $\operatorname{rot}(\mathbf{c} \times \mathbf{F}) = (\operatorname{div} \mathbf{F})\mathbf{c} - D(\mathbf{F})\mathbf{c}$, donde $D(\mathbf{F})$ es el jacobiano del campo \mathbf{F} y \mathbf{c} es cosnstante.
- (f) $\operatorname{rot}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\operatorname{div} \mathbf{G})\mathbf{F} - (\operatorname{div} \mathbf{F})\mathbf{G} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G}$.
- (g) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{F}) = \nabla(\operatorname{div} \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}$, donde se entiende que $\nabla^2 \mathbf{F}$ es el laplaciano (cf. ejer. 6), y \mathbf{F} tiene segundas derivadas parciales continuas.
- (h) $(\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{F} = \frac{1}{2} \nabla \|\mathbf{F}\|^2 + (\operatorname{rot} \mathbf{F}) \times \mathbf{F}$.

14. Hallar las expresiones para la divergencia y el rotacional de $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\rho, \theta)$ en coordenadas polares.

15. *Sean

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= (e^x + y^2 z, 2xyz, xy^2) \quad y \\ \mathbf{G} &= (e^x - y^2 z, 2xyz, xy^2). \end{aligned}$$

Determinar cuál de los dos campos es conservativo y hallar su potencial.

16. Sea $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (2xy e^z, x^2 e^z, x^2 y e^z + 2z)$.

- Calcular $\text{div } \mathbf{F}$ y $\text{rot } \mathbf{F}$.
- Hallar un campo escalar f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$. Analizar este resultado con el Teorema 1.

Ahora estamos listos para el cálculo de flujos sobre superficies.

Sea S una superficie suave en \mathbf{R}^3 , parametrizada por $\Phi : \Omega \rightarrow S$. Se dice que S es *orientable* si el *vector normal unitario* de S :

$$\mathbf{n} = \pm \frac{\Phi'_u \times \Phi'_v}{\|\Phi'_u \times \Phi'_v\|}$$

no se anula en Ω . El signo \pm se toma de modo que \mathbf{n} apunte al exterior (signo $+$) o al interior (signo $-$) de S . En el caso en que S sea cerrada, es claro cuál es el interior y el exterior. En el caso de no serlo, quedará claro del contexto del problema cual será la orientación.

Sea $\mathbf{F} : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ un campo vectorial sobre S . Se define el *flujo* de \mathbf{F} como

$$\Pi = \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS,$$

donde $d\mathbf{S}$ se interpreta como un vector diferencial, que en cada una de sus componentes tiene a la correspondiente componente del vector \mathbf{n} , multiplicada por el diferencial de superficie de dicha componente. Así, otra de las posibles notaciones para calcular el flujo se presenta (en algunos textos de Cálculo) como

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS,$$

donde $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ son los cosenos directores de la normal unitaria a S .

Tenemos entonces que el flujo Π de campo vectorial \mathbf{F} sobre una superficie S se puede calcular directamente por medio de las definiciones anteriores. Pero además, se tienen dos de los teoremas más importantes del Cálculo Diferencial. Se trata de los teoremas de Cálculo Vectorial.

Teorema 2.2. [STOKES] Sea $S \subset \mathbf{R}^3$ una superficie suave orientada, con frontera $C = \partial S$. Si \mathbf{n} es la normal unitaria a S y C está recorrida de modo que se cumpla la regla de la mano derecha², y \mathbf{t} es el vector tangente unitario a ∂S , entonces

$$\iint_S (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS = \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{t} ds,$$

donde la integral de la derecha (denominada *circulación* de \mathbf{F}) se calcula como una integral de línea.

²Recuerde que esta regla dice si el pulgar representa la orientación de \mathbf{n} , los otros dedos dan la orientación de la curva ∂S .

Teorema 2.3. [GAUSS] Sea $V \subset \mathbf{R}^3$ un sólido y S la superficie orientada *cerrada* que encierra a V , y sea $\mathbf{F} : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ un campo vectorial sobre S . Entonces

$$\iiint_V \text{div } \mathbf{F} dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS,$$

donde la integral de la izquierda se calcula como una integral de volumen.

Las propiedades más generales de estas integrales ya se conocen (linealidad con respecto a $\mathbf{F} = \lambda \mathbf{G} + \mu \mathbf{H}$), además de las que se citan a continuación:

- Si S es orientable y S^+ , S^- son las caras exterior e interior, respectivamente, tenemos

$$\iint_{S^+} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = - \iint_{S^-} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS.$$

- Si $\Phi(\Omega) = S$ no es regular en todo Ω , pero S se puede parametrizar como la unión de $\Phi_1(\Omega_1), \dots, \Phi_n(\Omega_n)$ parametrizaciones regulares, entonces el flujo de \mathbf{F} se puede calcular como

$$\Pi = \sum_{i=1}^n \iint_{S_i} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_i dS,$$

donde \mathbf{n}_i es el vector tangente unitario a cada superficie $S_i = \Phi_i(\Omega_i)$.

- Calcular el flujo del campo vectorial $\mathbf{F} = (x, y, z)$ sobre el cilindro circular recto de altura h , radio r y con eje de simetría el eje z .

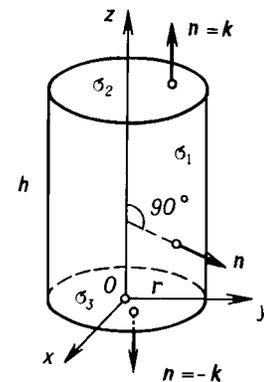


Fig. 6: Ejercicio 17.

Solución: Como se vé en la Fig. 6, es necesario descomponer S en la unión de tres superficies regulares

σ_i (la superficie lateral del cilindro es σ_1 y las “tapas” son σ_2 y σ_3), de modo que el flujo viene dado por la suma de los flujos sobre cada superficie. En primer lugar, la parametrización de σ_1 viene dada por

$$\Phi(t, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, t),$$

donde $\theta \in [0, 2\pi)$ y $t \in [0, h]$. Así, el vector normal unitario a σ_1 es

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_1 &= \frac{\Phi'_\theta \times \Phi'_t}{\|\Phi'_\theta \times \Phi'_t\|} = \frac{(r \cos \theta, r \sin \theta, 0)}{r} \\ &= (\cos \theta, \sin \theta, 0) \end{aligned}$$

(este resultado es obvio si uno mira el dibujo). Así:

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \iint_{\sigma_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_1 \, dS \\ &= \iint_{\sigma_1} (r \cos \theta, r \sin \theta, t) \cdot (\cos \theta, \sin \theta, 0) \, dS \\ &= \iint_{\sigma_1} r \, dS = r \iint_{\sigma_1} dS = r(2\pi r h) = 2\pi r^2 h \end{aligned}$$

(nótese que no es necesario trabajar mucho para calcular esta integral, ya que es el área de una hoja de papel de lados $2\pi r$ y h). En segundo lugar, como las tapas son paralelas al plano xy , $\mathbf{n}_2 = \mathbf{k}$ y $\mathbf{n}_3 = -\mathbf{k}$, de modo que

$$\begin{aligned} \Pi_2 &= \iint_{\sigma_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_2 \, dS \\ &= \iint_{\sigma_2} (t \cos \theta, t \sin \theta, h) \cdot (0, 0, 1) \, dS \\ &= \iint_{\sigma_2} h \, dS = h \iint_{\sigma_2} dS = h(\pi r^2) = \pi r^2 h; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_3 &= \iint_{\sigma_3} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_3 \, dS \\ &= \iint_{\sigma_3} (t \cos \theta, t \sin \theta, 0) \cdot (0, 0, -1) \, dS \\ &= \iint_{\sigma_3} 0 \, dS = 0. \end{aligned}$$

Finalmente, $\Pi = \sum_{i=1}^3 \Pi_i = (2\pi r^2 h) + (\pi r^2 h) + 0 = 3\pi r^2 h$ es el valor numérico del flujo (haga un dibujo para convencerse geoméricamente de que $\Pi_3 = 0$).

18. Calcular el flujo del vector $\mathbf{F} = 3\mathbf{j}$ a través de la superficie triangular de vértices $V_1 = (1, 2, 0)$, $V_2 = (0, 2, 0)$ y $V_3 = (0, 2, 2)$, orientando el triángulo de modo que la normal apunte hacia el origen de coordenadas.

19. *Hallar el flujo del campo constante $\mathbf{F} = (a, b, c)$ a través del círculo de radio R que se encuentra sobre el plano $z = k$, orientándolo de modo que la normal apunte en dirección positiva del eje z .

20. Hallar el flujo del vector $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{r} = (x, y, z)$ sobre la superficie (cerrada) del cono circular recot invertido, es decir, con el vértice en el origen, radio R y altura H , siendo su eje de simetría el eje z .

21. Si $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ es continua, hallar el flujo del campo $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(r)\mathbf{r}$ a través de la esfera de radio R centrada en el origen.

22. *Supongamos que una función de temperatura se dá como $T(\mathbf{r}) = r^2$ y sea S la esfera unitaria centrada en el origen. Calcular el flujo de calor $\mathbf{F} = -k\nabla T$ de la esfera ($k > 0$ es una constante).

23. Un campo de velocidad de un flujo de petróleo se describe por medio de $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (0, \sqrt{y}, 0)$ (medido en metros por segundo). Calcular cuántos metros cúbicos por segundo de petróleo atraviesan a una malla parabólica $y = x^2 + z^2$, $y \in [0, 1]$.

24. *Calcular el flujo del campo $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (-y, x, \sqrt{z})$ a través de la superficie S obtenida al limitar el parabolide $z = x^2 + y^2$ con el cilindro $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

25. Calcular el flujo del campo $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$ a través de la superficie

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = \sqrt{1 + x^2 + y^2}, x^2 + y^2 \leq 1\},$$

en la dirección de la normal con tercera coordenada positiva.

26. Sea $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (yz, xz, xy)$ y S la superficie (abierto) conformada por la mitad superior de la esfera unitaria centrada en el origen. Calcular el flujo de \mathbf{F} en dirección saliente a S de tres modos diferentes:

- (a) Usando directamente la definición;
- (b) Usando el Teorema de Gauss;
- (c) Usando el Teorema de Stokes.

Solución:

- (a) Para calcular $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS$ por definición, necesitamos un vector tangente unitario, el cual viene dado por la parametrización

$$\Phi(\theta, \phi) = (\cos \theta \cos \phi, -\sin \phi, \sin \theta \cos \phi),$$

donde $\theta \in [0, \pi)$ y $\phi \in (-\pi/2, \pi/2)$ (se deja al lector que chequee que esta transformación es un caso especial de coordenadas esféricas):

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \frac{\Phi'_\theta \times \Phi'_\phi}{\|\Phi'_\theta \times \Phi'_\phi\|} \\ &= \frac{1}{\|\Phi'_\theta \times \Phi'_\phi\|} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\sin \theta \cos \phi & 0 & \cos \theta \cos \phi \\ -\cos \theta \sin \phi & -\cos \phi & \sin \theta \sin \phi \end{vmatrix} \\ &= \frac{(\cos \theta \cos^2 \phi, -\cos \phi \sin \phi, \sin \theta \cos^2 \phi)}{\sqrt{\cos^2 \theta \cos^4 \phi + \cos^2 \phi \sin^2 \phi + \sin^2 \theta \cos^4 \phi}} \\ &= \frac{(\cos \theta \cos^2 \phi, -\cos \phi \sin \phi, \sin \theta \cos^2 \phi)}{|\cos \phi|} \\ &= (\cos \theta \cos \phi, -\sin \phi, \sin \theta \cos \phi) = \Phi(\theta, \phi), \end{aligned}$$

lo cual era evidente, puesto que la normal a una esfera tiene la misma dirección que el radio vector, y como la misma es unitaria, el vector normal unitario coincide con la parametrización de la esfera (un buen dibujo hubiese ahorrado todo este trabajo). Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS &= \iint_S (\mathbf{F} \circ \Phi) \cdot \Phi \, dS \\ &= -3 \int_0^\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta \sin \phi \cos^2 \phi \, d\phi \, d\theta \\ &= 3 \frac{\sin^2 \theta}{2} \Big|_0^\pi \frac{\cos^3 \phi}{3} \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 0. \end{aligned}$$

- (b) Para usar el Teorema de Gauss, es necesario que S sea cerrada. Y aunque en este caso no lo es, todavía se aplica dicho teorema, ya que definimos $\Sigma = S \cup S'$, donde S' es la superficie circular que “tapa” a S . Así, el Teorema de Gauss dice que

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS &= \iint_\Sigma \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS - \iint_{S'} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS \\ &= \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV - \iint_{S'} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS \\ &= -\iint_{S'} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS, \end{aligned}$$

ya que $\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial(yz)}{\partial x} + \frac{\partial(xz)}{\partial y} + \frac{\partial(xy)}{\partial z} = 0$. Así, el cálculo del flujo sobre la mitad superior de la esfera queda reducido al cálculo sobre el círculo σ , parametrizado por $\Psi(t, \theta) = (t \cos \theta, t \sin \theta, 0)$, y no es necesario hacer muchos cálculos para darse

cuenta de que tiene como normal a $-\mathbf{k}$. En definitiva

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS &= -\iint_{S'} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (t \cos \theta, t \sin \theta, 0) \cdot (0, 0, -1) \, dt \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 0 \, dt \, d\theta = 0. \end{aligned}$$

Además, el hecho de que $\operatorname{rot} \mathbf{F} = 0$ (verificar) y la primera relación del Teorema 1 dicen que existe una $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ tal que $\mathbf{F} = \nabla f$. Se deja como ejercicio comprobar que cualquier f que satisfaga esta relación debe ser de la forma $f(\mathbf{r}) = xyz + C$, con C constante.

- (c) Parece que no se puede aplicar el Teorema de Stokes, ya que la integral que se pide no parece estar en función de un rotacional, por lo menos a la vista. Pero usando la segunda relación del teorema 1, ya habíamos observado que $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$, por lo que existe un campo vectorial \mathbf{G} tal que $\operatorname{rot} \mathbf{G} = \mathbf{F}$. Hallar este campo \mathbf{G} es, en general, muy complicado³, pero después de escribir las componentes del $\operatorname{rot} \mathbf{G}$ e igualarlas a las componentes de \mathbf{F} , se llega a la conclusión de que

$$\mathbf{G} = \left(x \left(\frac{y^2}{2} + z^2 \right), y \left(\frac{z^2}{2} + x^2 \right), z \left(\frac{x^2}{2} + y^2 \right) \right)$$

es una solución posible. Además, una parametrización para la curva frontera de S es $\sigma(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$, y el vector tangente (unitario) es $\sigma'(\theta) = (-\sin \theta, \cos \theta, 0)$. Así, y usando el Teorema de Stokes, tenemos

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS &= \iint_S (\operatorname{rot} \mathbf{G}) \cdot \mathbf{n} \, dS = \oint_{\partial S} \mathbf{G} \cdot \sigma' \, ds \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\cos^3 \theta \sin \theta - \frac{1}{2} \sin^3 \theta \cos \theta \right) d\theta \\ &= -\frac{\sin^4 \theta}{8} \Big|_0^{2\pi} - \frac{\cos^4 \theta}{4} \Big|_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

Observación: Los tres métodos que se usaron aquí para resolver el problema no suelen ser típicamente muy efectivos para *todos* los tipos de problemas. Así, el tercer método fué el más “rebuscado” y el segundo el más elegante. Decidir cual debe usarse depende

³Hay que resolver un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, las cuales se ven, muy someramente, en MA-3111.

de la complicación del problema y de la “astucia” del lector.

27. *Sea S una superficie cerrada que intersecta al plano $x + y + z = 2$ en una curva simple cerrada γ . Usando el Teorema de Stokes, demostrar que

$$I = \oint_{\gamma} (-y - 2z) dx + (x - z) dy + (2x + y) dz = 0 .$$

28. La intersección de una superficie S con el cilindro $x^2 + y^2 = 2$ es una curva simple cerrada γ . Calcular

$$I = \oint_{\gamma} 2xz^2 dx + (x^2 + yz^2 - 2xy) dy + x^2z dz$$

(Sugerencia: mostrar que $\text{rot } \mathbf{F}$ es tangente al cilindro).

29. *Usando el Teorema de Stokes, hallar el trabajo efectuado por la fuerza $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (x + y, y + z, x + 2)$ para desplazar una partícula a los largo del contorno del triángulo de vértices $A = (2, 0, 0)$, $B = (0, 2, 0)$ y $C = (0, 0, 2)$, partiendo de C y regresando a C en el sentido $CBAC$.

30. Sea γ una curva intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + y)$ con el cilindro $x^2 + y^2 = 2$. Calcular

$$I = \oint_{\gamma} (2xy + 2yz) dx + x^2 dy + xy dz$$

(Sugerencia: comprobar que $\text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ es constante para el cilindro).

31. *Sean $F(\mathbf{r}) = (-yx^2, xy^2, 0)$ y

$$\gamma = \{ \mathbf{r} \in \mathbf{R}^3 \mid z = x^2 + y^2, z = 6 - 2x^2 - 2y^2 \} .$$

Calcular $\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\sigma$, si γ se recorre en sentido antihorario visto por un observador en el origen.

32. Un campo escalar f que nunca es cero, satisface las propiedades $\|f\|^2 = 4f$ y $\text{div}(f\nabla f) = 10f$. Evaluar la integral de superficie $\iint_S f \cdot d\mathbf{S}$, donde S es la superficie de una esfera de radio a centrada en el origen (Sugerencia: usar alguna de las relaciones del ejercicio 13).

33. Cerrando de un modo adecuado las superficies abiertas dadas y aplicando el Teorema de Gauss, calcular el flujo de los siguientes campos vectoriales a través de la superficie S dada, tomando la normal exterior:

- (a) $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (1 - 2x, y, z)$, si

$$S = \{ x^2 + y^2 = z^2, z \in [0, 4] \} .$$

- (b) $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (z^2, xy, y)$, si

$$S = \{ x^2 + y^2 = 4 - z, z \in [0, 4] \} .$$

34. Repetir la pregunta anterior para los siguientes ejercicios, donde ahora la superficie S es cerrada, pero hacerlo previamente por definición (y por lo tanto ambos resultados deben coincidir):

- (a) $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (x, 0, z)$; $S \equiv \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 4 \end{cases}$.

- (b) $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (2x, 2y, -z)$; $S \equiv \begin{cases} z^2 = x^2 + y^2 \\ z = H > 0 \end{cases}$.

- (c) $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (x, 0, -z)$; $S \equiv \begin{cases} z = 6 - x^2 - y^2 \\ z = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$.

- (d) $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (x, 2y, -z)$; $S \equiv \begin{cases} z^2 = x^2 + y^2 \\ z = x^2 + y^2 \end{cases}$.

- (e) $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (2x, 0, 1 - z)$; $S \equiv \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 0, z = 1 \end{cases}$.

- (f) $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (x + z, y + x, z + y)$; $S \equiv \begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ z = y, z = 0 \end{cases}$.

- (g) $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (y - x, z - y, x - z)$; $S \equiv \begin{cases} x \pm y + z = 1 \\ x = z = 0 \end{cases}$

- (h) $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (x - y + z, y - z + x, z - x + y)$;

$$S = \{ |x - y + z| + |y - z + x| + |z - x + y| = 1 \} .$$

35. Sea S una porción del plano $\mathbf{a} \cdot \mathbf{r} = 0$ con área A . Calcular el flujo del campo $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{b} = \text{ctte.}$ a través de S , en la dirección de \mathbf{a} , en términos de \mathbf{a} , \mathbf{b} y A .

36. *Sea

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \left(\frac{x^2y}{1+y^2} + 6yz^2, 2x \arctan y, 1 - \frac{2xz(1+y)}{1+y^2} \right)$$

y sea S el fragmento del paraboloido $z = 1 - x^2 - y^2$ que está por encima del plano $z = 0$, con normal unitaria cuya componente z es no-negativa. Calcular el flujo de \mathbf{F} , usando

- (a) el Teorema de Gauss;

- (b) el Teorema de Stokes (*Sugerencia*: unos minutos de “tanteo” permiten descubrir que

$$\mathbf{G} = \left(2xz \arctan y - y, -\frac{x^2 y z}{1 + y^2}, 3y^2 z^2 \right)$$

satisface $\text{rot } \mathbf{G} = \mathbf{F}$).

37. Usar el Teorema de Gauss para calcular las siguientes integrales:

- (a) $\iint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$, donde S representa las tres caras que intersectan a los planos coordenados del cubo de arista a con vértice en el origen.

- (b) $\iint_S x^3 dy dz + y^3 dz dx + z^3 dx dy$, donde S es la esfera de radio a centrada en el origen.

- (c) $\iint_S \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r} dS$, donde S es el trozo de paraboloides $z = x^2 + y^2$ para $0 \leq z \leq 1$.

- (d) $\iint_S \frac{\mathbf{u} \cdot d\mathbf{S}}{p}$, donde S es el elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, p es la distancia perpendicular desde el origen al plano tangente al elipsoide en el punto donde está situado $d\mathbf{S}$ y \mathbf{u} es el vector unitario en la dirección de la normal en dicho punto.

38. *Sean

$$S = \left\{ \mathbf{r} \in \mathbf{R}^3 \mid |x| + \frac{|y|}{2} + \frac{|z|}{3} = 1 \right\},$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (x + z^3, y + xz, z + y^2).$$

Calcular $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$, donde \mathbf{n} es el vector normal unitario a S que apunta hacia el origen.

39. *Si

$$\mathbf{F} = (2yz, -(x + 3y - 2), x^2 + z^2),$$

calcular $\iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$ sobre la superficie intersección de los cilindros $x^2 + y^2 = a^2$ y $x^2 + z^2 = a^2$ situada en el primer octante.

40. *Si

$$\mathbf{F} = (x^2 + y - 4, 3xy, 2xz + z^2),$$

calcular $\iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$ sobre

- (a) la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ por encima del plano xy , y sobre

- (b) el paraboloides $z = 4 - (x^2 + y^2)$ por encima del plano xy .

41. **Sea $\Phi(s, t) : B \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ una parametrización regular de una superficie $S \subset \mathbf{R}^3$, con

$$B = \{ (s, t) \mid 0 \leq s, t - 1 \leq 1 \}.$$

Se define $\hat{\Phi}(u, v) : A \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ por medio de la fórmula $\hat{\Phi}(u, v) = \Phi(v, u)$.

- (a) Describir el conjunto A de manera que $\hat{\Phi}$ también sea una parametrización regular de S . Comparar las s -curvas y t -curvas de Φ con las u -curvas y v -curvas de $\hat{\Phi}$. Hallar una relación entre el producto fundamental de ambas parametrizaciones.

- (b) Sea f una función escalar continua definida en \mathbf{R}^3 . Demostrar con detalle que el valor de $\iint_S f dS$ es el mismo al usar cualquiera de las dos parametrizaciones anteriores.

- (c) Si \mathbf{F} es un campo vectorial, ¿qué diferencia existe entre $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$ y $\iint_{\hat{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$, con $S = \Phi(B)$ y $\hat{S} = \hat{\Phi}(A)$?

42. Demostrar que el Teorema de Green es consecuencia del Teorema de Gauss.

43. Sean f, g diferenciables y V un sólido en \mathbf{R}^3 cuya frontera es una superficie $\partial V = S$. Demostrar la *primera identidad de Green*

$$\iiint_V (f \nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g) dV = \iint_S (f \nabla g) \cdot d\mathbf{S},$$

y deducir la *segunda identidad de Green*

$$\iiint_V (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) dV = \iint_S (f \nabla g - g \nabla f) \cdot d\mathbf{S}.$$

44. Recordemos que un campo escalar f se dice *armónico* si $\nabla^2 f(\mathbf{r}) = 0, \forall \mathbf{r} \in \mathbf{R}^3$. Si f y g son armónicas, demostrar que:

(a) $\iint_S \nabla f \cdot \mathbf{n} dS = 0.$

(b) $\iint_S f \nabla g \cdot \mathbf{n} dS = \iint_S g \nabla f \cdot \mathbf{n} dS.$

$$(c) \iint_S f \nabla f \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_V \|\nabla f\|^2 dV$$

45. *Sean f un campo escalar y \mathbf{F} un campo vectorial diferenciables. Si el sólido V tiene a S como frontera, demostrar que

$$\iint_S (f\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_V (\nabla f) \cdot \mathbf{F} dV + \iiint_V f \operatorname{div} \mathbf{F} dV$$

(Sugerencia: sería útil mirar de nuevo el ejercicio 13).

46. Sea S una superficie cerrada regular que limita un sólido V , \mathbf{n} un vector unitario normal a S y $\mathbf{F} = (ax, by, cz)$, con a, b, c constantes. Demostrar que

$$(a) \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{n} dV = \text{área}(S).$$

$$(b) \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = (a + b + c) \text{volúmen}(V).$$

$$(c) \iiint_V \frac{dV}{r^2} = \iint_S \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^2} dS.$$

47. Sea $t > 0$ y $f(\mathbf{r}) = f(x, y, z, t)$ un campo escalar diferenciable. Demostrar la fórmula

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} f dx dy dz \right) &= \\ &= \iint_{x^2+y^2+z^2=t^2} f dS + \iiint_{x^2+y^2+z^2 < t^2} \frac{\partial f}{\partial t} dx dy dz. \end{aligned}$$

Respuestas a algunos de los ejercicios:

4. $\operatorname{div} \mathbf{F}(B) = 0$, $\operatorname{div} \mathbf{F}(A) < 0$ y $\operatorname{div} \mathbf{F}(C) > 0$.
5. Hay infinitas respuestas. Una de ellas es $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (1, 0, x)$.
9. (a) $\operatorname{div} \mathbf{F} = 2(x + y + z)$; $\operatorname{rot} \mathbf{F} = 0$.
 (b) $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$; $\operatorname{rot} \mathbf{F} = (2, 4, 6)$.
 (c) $\operatorname{div} \mathbf{F} = -x \operatorname{sen} y$; $\operatorname{rot} \mathbf{F} = (1, 1, 0)$.
 (d) $\operatorname{div} \mathbf{F} = a + d + \frac{\partial f}{\partial z}$; $\operatorname{rot} \mathbf{F} = \left(\frac{\partial f}{\partial y}, -\frac{\partial f}{\partial x}, c - a \right)$.

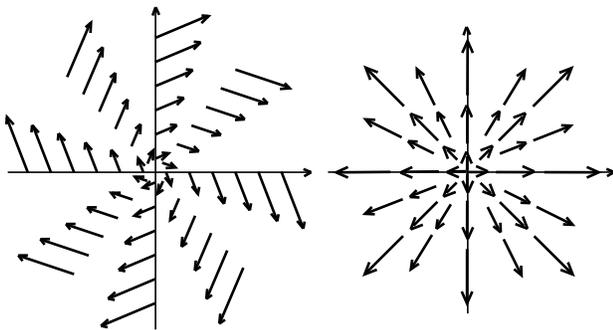


Fig. 7: Respuestas a los ejercicios 1(d) y 1(f).

12. $\operatorname{rot} \mathbf{F}(A) = (0, -3, -3)$.

14. Si \mathbf{F}_ρ y \mathbf{F}_θ son las proyecciones del vector \mathbf{F} sobre las curvas $\rho = \text{cte.}$ y $\theta = \text{cte.}$, respectivamente, y $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$, tenemos $\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \mathbf{F}_\rho) + \frac{\partial \mathbf{F}_\theta}{\partial \theta} \right]$ y $\operatorname{rot} \mathbf{F} = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \mathbf{F}_\theta) + \frac{\partial \mathbf{F}_\rho}{\partial \theta} \right] \mathbf{k}$.

15. \mathbf{F} si y \mathbf{G} no; $f(\mathbf{r}) = e^x + xy^2z$.

16. (a) $\operatorname{div} \mathbf{F} = (2 + x^2)y e^z + 2$; $\operatorname{rot} \mathbf{F} = (0, 0, 0)$.

(b) $f(\mathbf{r}) = x^2y e^z + z^2 + C$; esta f es solución, ya que según el Teorema 1, $\operatorname{rot} \mathbf{F} = \operatorname{rot} \nabla f = 0$.

18. $\Pi = -3$.

21. $\Pi = 4\pi R^3 f(R)$.

19. $\Pi = \pi R^2 c$.

22. $\Pi = -8k\pi$.

20. $\Pi = \pi R^2 H$.

23. $\Pi = 2\pi/3$.

28. $I = 0$.

29. Se necesitan 6 unidades de trabajo.

32. $8\pi a^3$.

33. (a) $\Pi = \frac{256\pi}{3}$; (b) $\Pi = 8\pi$.

34. (a) $\Pi = 16\pi$; (b) $\Pi = \pi H^3$; (c) $\Pi = \frac{32\pi}{3}$; (d) $\Pi = \frac{\pi}{3}$; (e) $\Pi = 4\pi$; (f) $\Pi = 2R^3$; (g) $\Pi = -1$; (h) $\Pi = 1$.

36. $\Pi = -\pi$.

(a) $3a^4$ (c) $\frac{3}{\sqrt{2}}\pi - \operatorname{lg}n(3 + \sqrt{2})$

37. (b) $\frac{12}{5}\pi a^5$ (d) $\frac{4}{3} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \pi abc$

39. $-\frac{a^2}{12}(3\pi + 8a)$

40. (a) -16π ; (b) -4π .

41. (a) $A = \{ (u, v) \mid u \in [-1, 0], v \in [0, 1] \}$.

(c) Ambas integrales son iguales en módulo, pero de signo contrario.